Biforcazione e Catastrofe

Domenico Luminati
Dipartimento di Matematica
Università di Trento

Biforcazione

Sistema ad un grado di libertà x soggetto al potenziale

$$\Phi_a(x) = \frac{x^4}{4} - a\frac{x^2}{2}$$

Le posizioni d'equilibrio del sistema sono date da

$$0 = \frac{d\Phi_a}{dx}(x) = x^3 - ax = x(x^2 - a)$$

quindi se $a < 0$ c'è una sola posizione d'equilibrio ($x = 0$) che è stabile (i.e. è un minimo del potenziale), mentre se $a > 0$ ci sono tre distinte posizioni d'equilibrio ($x = 0$, $x = \sqrt{a}$ e $x = -\sqrt{a}$) due stabili ($x = \pm\sqrt{a}$) ed una instabile ($x = 0$).

In $a = 0$ si ha una biforcazione (prima c'è una sola posizione d'equilibrio stabile, poi ce ne sono due) e si noti che la soluzione che per $a < 0$ era stabile passando attraverso il punto di biforcazione diventa instabile.

Nella prima parte dell'animazione il pallino blu descrive il valore del parametro a mentre l'ordinata del pallino arancio descrive la posizione d'equilibrio occupata dalla palla rossa sul grafico di Φ_a. La "forchetta" che compare alla fine della prima parte rappresenta l'insieme delle posizioni d'equilibrio al variare del parametro a.

Catastrofe

Sistema ad un grado di libertà x soggetto al potenziale

$$\Phi_{a,b}(x) = \frac{x^4}{4} - a\frac{x^2}{2} - bx$$

Introducendo un altro parametro (il potenziale precedente è un caso particolare di questo, infatti $\Phi_a = \Phi_{a,0}$) si riesce a girare attorno al punto di biforcazione, si presenta però un'altro fenomeno: la "catastrofe".

Le posizioni d'equilibrio del sistema sono date da

$$0 = \frac{d\Phi_{a,b}}{dx}(x) = x^3 - ax - b$$

questo è un generico polinomio di terzo grado (a meno di una traslazione, ogni polinomio di terzo grado ha questa forma) quindi ci saranno valori di a e b per i quali c'è un'unica radice che sarà un minimo del potenziale e ci saranno valori per cui si hanno tre radici distinte che si può facilmente vedere che sono due minimi (stabili) ed un massimo (instabile). Si può provare che per $a^3/27 - b^2/4 > 0$ si hanno tre radici distinte e per $a^3/27 - b^2/4 < 0$ ce n'è una sola. Nel passaggio dalla zona con tre radici a quella con una radice, si può avere la catastrofe: la posizione d'equilibrio stabile in cui si trova il punto scompare e quindi il punto è costretto a saltare sull'altra posizione d'equilibrio.

Nella seconda parte dell'animazione, il pallino blu si muove descrivendo una circonferenza nello spazio dei parametri a e b (il piano bianco) mentre la terza coordinata del pallino arancio descrive la corrispondente posizione d'equilibrio occupata dalla palla rossa sul grafico di $\Phi_{a,b}$. La superficie rappresenta l'insieme delle posizioni d'equilibrio al variare dei parametri a e b.